1 Algebraische Grundlagen

Binomische Formeln	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$	$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Wurzeln und Potenzen

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$	$\sqrt{a} \geq 0$	$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$	$\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{\text{n Faktoren}} = a$
$a^n = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n Faktoren}}$	$a^0 = 1$	$a^1 = a$
$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$	$a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x$	$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	

Logarithmen

$\log_b a = z \Leftrightarrow b^z = a$

$\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$	$\log_b \dfrac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$
$\log_b u^z = z\cdot\log_b u$	$\log_c a = \dfrac{\log_b a}{\log_b c}$

Geradengleichung

$y = m\cdot x + t$	(allgemeine Form)
$y = m\cdot(x - x_0) + y_0$	(Punkt-Steigungs-Form)

Parabelgleichung

$y = ax^2 + bx + c$	(allgemeine Form)
$y = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$	(Scheitelform)
$y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$	(Linearfaktorform)

Lösungsformel für die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2 Analysis

Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems

$\left.\begin{array}{l} f(-x)=f(x) \\ \text{für alle } x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse (f heißt dann gerade Funktion)

$\left.\begin{array}{l} f(-x)=-f(x) \\ \text{für alle } x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung (f heißt dann ungerade Funktion)

Differenzenquotient

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Sekantensteigung bzgl. x_0 und x)

Ableitung $f'(x_0)$ (Differentialquotient)

Besitzt der Graph G_f an der Stelle x_0 eine eindeutige Tangente, so wird die Steigung dieser Tangente mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Dann gilt: $x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$

Schreibweisen: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$

$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

Ableitung der Grundfunktionen

$\frac{d}{dx}(x^r)=r\cdot x^{r-1}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^r}\right)=-\frac{r}{x^{r+1}}$

$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

$\frac{d}{dx}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}$

Ableitungsregeln

$f(x)=u(x)+v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'(x)+v'(x)$

$f(x)=c\cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=c\cdot u'(x)$

$f(x)=u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

$f(x)=u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$

Monotonie-kriterium	$f'(x) < 0$ im Intervall I $f'(x) > 0$ im Intervall I	$\Rightarrow$ G_f fällt streng monoton in I. $\Rightarrow$ G_f steigt streng monoton in I.
Art von relativen Extrema	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum. $\Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.
Graphen-krümmung	$f''(x) < 0$ im Intervall I $f''(x) > 0$ im Intervall I	$\Rightarrow$ G_f ist in I rechtsgekrümmt. $\Rightarrow$ G_f ist in I linksgekrümmt.
Wendepunkt	Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.	
Terrassenpunkt	Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt.	
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	Ist f eine in [a; b] stetige Funktion, so ist die Integralfunktion $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ differenzierbar und F_a ist eine Stammfunktion von f, d. h. $F_a'(x) = f(x)$. Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	
Partielle Integration	$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\, dx$	
Integration durch Substitution	$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$ mit $x = g(t)$	

Volumen eines Rotationskörpers

Rotation um die x-Achse: $V = \pi \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(f(x)\right)^2 dx$

Rotation um die y-Achse: $V = \pi \cdot \int\limits_{y_1}^{y_2} \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx$

Unbestimmte Integrale

$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$ $\qquad$ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int e^x \, dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int \ln x \, dx = -x + x \cdot \ln x + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$ $\qquad$ $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + C$

$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \, dx = \tan x + C$ $\qquad$ $\int \frac{1}{(\sin x)^2} \, dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

$\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ $\qquad$ $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$

$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$ $\qquad$ wobei F eine Stammfunktion von f ist

---

Grenzwerte

für $r > 0$ gilt:

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad x^r \cdot e^x \to 0$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{x^r}{e^x} \to 0$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln x}{x^r} \to 0$

$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad x^r \cdot \ln x \to 0$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

	Ω sei der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments und $A, B \subseteq \Omega$ seien zwei beliebige Ereignisse.
Gesetze der Mengenalgebra	$\overline{A} = \Omega \setminus A$ $\quad$ $A \cap \overline{A} = \{\ \}$ $\overline{\overline{A}} = A$ $\quad$ $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
Gesetze von De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\quad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Unvereinbarkeit	$A \cap B = \{\ \}$ $\Leftrightarrow$ A und B heißen unvereinbar.
Ereignis-wahrscheinlichkeiten	$P(\{\ \}) = 0$ $\quad$ $P(\Omega) = 1$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Satz von Sylvester	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Unabhängigkeit von zwei Ereignissen	$P_A(B) = P(B)$ oder $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\Leftrightarrow$ A und B sind stochastisch unabhängig.
Fakultät	$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Der Wert $n!$ gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen Teilmengen mit k Elementen zu bilden.
Laplace-Experiment	Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes gleich wahrscheinlich sind. Es gilt dann: $P(A) = \frac{\lvert A \rvert}{\lvert \Omega \rvert}$

Maßzahlen von Zufallsgrößen

Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ an.

Dann gilt:

- **Erwartungswert**

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

- **Varianz**

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad \text{(Verschiebungsregel)}$$

- **Standardabweichung**

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p.

Dann gilt:

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X heißt Binomialverteilung.
- X heißt binomialverteilt, genauer B(n; p)-verteilt.

Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt nach B(n; p), so gilt:

- $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für k = 0, 1, ... , n
- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypothesentest

Beim Testen der Nullhypothese H_0 in einem Signifikanztest mit Signifikanzniveau α können zwei Fehler auftreten:

- Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
- Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Das Signifikanzniveau α des Tests ist die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

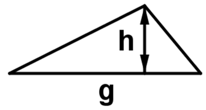
4 Geometrie

Flächengeometrie

A: Flächeninhalt
U: Umfang

Allgemeines Dreieck

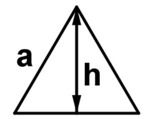
$$A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$$



Gleichseitiges Dreieck

$$A=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$$

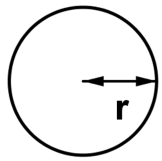
$$h=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}$$



Kreis

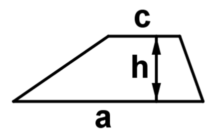
$$U=2\cdot r\cdot\pi$$

$$A=r^2\cdot\pi$$



Trapez

$$A=\frac{a+c}{2}\cdot h$$

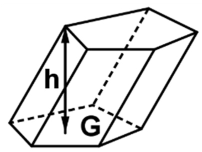


Raumgeometrie

V: Volumen
G: Grundfläche
M: Mantelfläche
O: Oberfläche

Prisma

$$V=G\cdot h$$



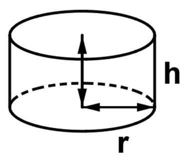
Pyramide

$$V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$$

Gerader Kreiszylinder

$$V=r^2\cdot\pi\cdot h$$

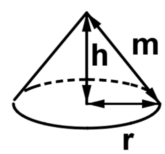
$$M=2\cdot r\cdot\pi\cdot h$$



Gerader Kreiskegel

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$$

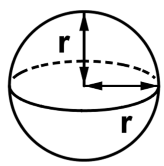
$$M=r\cdot\pi\cdot m$$



Kugel

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$$

$$O=4\cdot r^2\cdot\pi$$



Geradengleichung

$g:\ \vec{x}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{u}$ (Parameterform)

Ebenengleichung

$E:\ \vec{x}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}$ (Parameterform)

$E:\ a\cdot x_1+b\cdot x_2+c\cdot x_3+d=0$ (Koordinatenform)

$E:\ \vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{a})=0$ (Normalenform)

$E:\ \frac{x_1}{s}+\frac{x_2}{t}+\frac{x_3}{u}=1$ (Achsenabschnittsform)

mit den Achsenschnittpunkten

$S(s\,|\,0\,|\,0)$, $T(0\,|\,t\,|\,0)$, $U(0\,|\,0\,|\,u)$

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$	$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts	• zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$ • Betrag eines Vektors: $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$ • Einheitsvektor: $\vec{a}^{0} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ • Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
Vektorprodukt	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$
Eigenschaften und Anwendungen des Vektorprodukts	• $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. • $\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\varphi$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ • Maßzahl F des Flächeninhalts des Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} \cdot \lvert\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\rvert$ • Maßzahl V des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \cdot \left\lvert \overrightarrow{AB} \circ \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) \right\rvert$
Lineare Unabhängigkeit	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig. $\Leftrightarrow$ Die Gleichung $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$ ist nur mit $\lambda = \mu = \nu = 0$ lösbar. $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq 0$
Besondere Punkte	Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

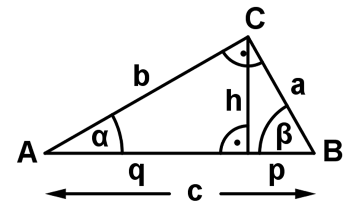
5 Trigonometrische Grundlagen

Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

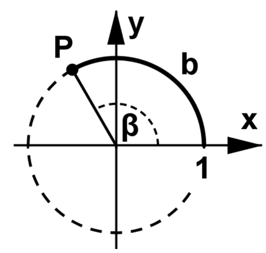
Kathetensatz: $a^2 = cp\,;\; b^2 = cq$



$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\qquad$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{b}$

Beziehungen am Einheitskreis

- $P(x_P \,|\, y_P)$ liegt auf dem Einheitskreis
  $\Rightarrow$ $\cos\beta = x_P$ und $\sin\beta = y_p$
- $\dfrac{b}{\pi} = \dfrac{\beta}{180^\circ}$



Trigonometrische Beziehungen

$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\qquad$ $\sin(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi$

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi$

Additions-theoreme

$\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$ $\qquad$ $(\sin\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos\varphi)$

$\cos(2\varphi) = (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2$ $\qquad$ $(\cos\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos\varphi)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt. ***Stand der Merkhilfe: 11.09.2017***